

- (10p) 1) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuație $ax + by - 1 = 0$ să fie tangentă în punctul $x_0 = 0$ la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.
- (5p) 2) Determinați punctele unghiulare ale graficului funcției
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , x \leq 0 \\ \sin x & , x > 0 \end{cases}$
- (15p) 3) Se consideră funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (x-1) \cdot e^{3x}$,
 $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ și $h(x) = \ln \frac{1}{1+x^2}$. Calculați derivatele în $x_0 = 0$ ale funcțiilor considerate.
- (5p) 4) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x + 2$ este bijectivă și calculați $(f^{-1})'(6)$.
- (5p) 5) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că polinomul $g(X) = (X-2)^2$ divide polinomul $f(X) = aX^3 + bX^2 + 4$.
- (10p) 6) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$. Demonstrați că ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții reale și deduceți că derivata f' este o funcție strict crescătoare.
- (10p) 7) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Rezolvați ecuația $f'(x) = 0$ și determinați punctele de extrem ale funcției, precizând natura lor.
- (5p) 8) Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile pentru care $g(0) = 1$ și $f(x) = (\sin x) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 Arătați că tangenta în origine la graficul funcției este paralelă cu dreapta de ecuație $y - x - 1 = 0$.
- (5p) 9) Determinați funcția derivabilă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care
 $f(0) = 0$ și $(x^2 - x + 1) \cdot f'(x) = 2x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (5p) 10) Determinați expresia derivatei de ordinul n , $n \in \mathbb{N}^*$, a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 1)$.

Din oficiu se acordă 30 de puncte.